Lógica

Estandarización de Fórmulas

Damiano Zanardini

Graduado/a en Ingeniería Informática
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
damiano@fi.upm.es

Curso Académico 2010/2011

Deducción como satisfacibilidad

Nuestra observación principal

- por los Teoremas de Validez, Completitud y Deducción:

$$T[F_1, .., F_n] \models G \quad \text{sii} \quad T[F_1, .., F_n] \vdash G \quad \text{sii} \quad INSAT(F_1 \wedge .. \wedge F_n \wedge \neg G)$$

☞ esto significa que se puede reducir un problema de deducción (si una fórmula se puede derivar a partir de un conjunto de premisas) a un problema de satisfacibilidad

☞ la satisfacibilidad también nos puede decir si un conjunto de fórmulas contiene contradicciones

- la técnicas que vamos a ver estudian la satisfacibilidad

Deducción como satisfacibilidad

Un ejemplo: cómo obtener papeles en España...

- para obtener el número de Seguridad Social me dijeron que necesitaba un contrato de trabajo

Deducción como satisfacibilidad

Un ejemplo: cómo obtener papeles en España...

- para obtener el número de Seguridad Social me dijeron que necesitaba un contrato de trabajo
- cuando estaba a punto de firmar el contrato, me dijeron que me faltaba el número de Seguridad Social

Deducción como satisfacibilidad

Un ejemplo: cómo obtener papeles en España...

- para obtener el número de Seguridad Social me dijeron que necesitaba un contrato de trabajo
- cuando estaba a punto de firmar el contrato, me dijeron que me faltaba el número de Seguridad Social

¿  ?

Forma normal de Skolem

Nuestro objetivo: simplificar fórmulas

Queremos obtener, mediante una serie de *transformaciones*, una fórmula con la que sea más fácil trabajar automáticamente, pero que siga teniendo ciertas propiedades de la fórmula original

- ésto se llama *estandarización*, y nos lleva antes a la *Forma Normal de Skolem*, luego a la *Forma Clausular*

Ejemplo de aplicación

$$\forall y \ (\ \ (\exists x p(x, f(y)) \rightarrow (\ q(y) \wedge q(z) \ ) \ ) \ \ \vee \ \neg \forall w r(g(w), y) \ \ )$$

Forma normal de Skolem

Cómo obtener la Forma Normal de Skolem (FNS)

1. todos los cuantificadores van a la cabeza de la fórmula (*forma prenex*)
   - mover los cuantificadores según *reglas de equivalencia*
2. ninguna aparición libre de variable
   - realizar el *cierre existencial*
3. la *matriz* de la fórmula está en *forma normal conjuntiva* (FNC): una conjunción de disyunciones de literales
   - transformar la fórmula según *reglas de equivalencia*
4. sólo cuantificadores universales
   - eliminar los cuantificadores existenciales introduciendo *funciones de Skolem*

Forma normal de Skolem

¿Qué es lo que preserva esta transformación?

- preserva la satisfacibilidad
- pero *no* preserva todos los modelos (es decir, la *semántica*): el resultado *no* es equivalente a la fórmula original

Preservación

Consideremos una transformación de F a F'

- preservar la semántica significa que, para toda interpretación $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ es un modelo de F sii es un modelo de F'
  - $\forall x p(x)$ es semánticamente equivalente a $\neg\exists x \neg p(x)$
- preservar la satisfacibilidad significa que existe un modelo $\mathcal{I}$ de F sii existe un modelo $\mathcal{I}'$ (probablemente no el mismo) de F'
  - $SAT(\exists x p(x))$ sii $SAT(p(a))$

Forma normal de Skolem

1. Forma prenex: todos los cuantificadores en cabeza

Para obtener la forma prenex se usan la siguientes reglas de equivalencia que *mueven* los cuantificadores hacia la cabeza:

- renombramiento de apariciones ligadas (si y no aparece libre en F)
  $\vdash \forall x F(x) \leftrightarrow \forall y F(x/y)$ $\quad$ $\vdash \exists x F(x) \leftrightarrow \exists y F(x/y)$
- interdefinición de cuantificadores
  $\vdash \neg\forall x F(x) \leftrightarrow \exists x \neg F(x)$ $\quad$ $\vdash \neg\exists x F(x) \leftrightarrow \forall x \neg F(x)$
- conectivas vs. cuantificadores (si x no aparece libre en la otra fórmula)
  $\vdash \forall x F \wedge G \leftrightarrow \forall x (F \wedge G)$ $\quad$ $\vdash (\forall x F \rightarrow G) \leftrightarrow \exists x (F \rightarrow G)$
  $\vdash \exists x F \wedge G \leftrightarrow \exists x (F \wedge G)$ $\quad$ $\vdash (\exists x F \rightarrow G) \leftrightarrow \forall x (F \rightarrow G)$
  $\vdash \forall x F \vee G \leftrightarrow \forall x (F \vee G)$ $\quad$ $\vdash (F \rightarrow \forall x G) \leftrightarrow \forall x (F \rightarrow G)$
  $\vdash \exists x F \vee G \leftrightarrow \exists x (F \vee G)$ $\quad$ $\vdash (F \rightarrow \exists x G) \leftrightarrow \exists x (F \rightarrow G)$
- conectivas vs. cuantificadores (más)
  $\vdash (\forall x F \wedge \forall x G) \leftrightarrow \forall x (F \wedge G)$ $\quad$ $\vdash (\exists x F \vee \exists x G) \leftrightarrow \exists x (F \vee G)$
  ☞ sólo hay estas dos, no la con $\forall$ y $\vee$ ni la con $\exists$ e $\wedge$

Forma normal de Skolem

Lema

La forma prenex de una fórmula siempre existe, aunque puede no ser única

Demostración.

- ¿cómo se podría demostrar?

Lema

Toda fórmula F es equivalente a su(s) forma(s) prenex:

$$\vdash F \leftrightarrow Prenex(F)$$

Demostración.

- fácil porque todos los pasos hacia $Prenex(F)$ son equivalencias

Forma normal de Skolem

2. Cierre existencial: ya ninguna aparición libre de variable

Variables que aparecen libres en la fórmula se ligan existencialmente

$$\forall y(x \wedge q(y)) \rightsquigarrow \exists x(\forall y(x \wedge q(y)))$$
$$\forall y \exists x(p(x) \wedge q(y) \to r(f(z), x)) \rightsquigarrow \exists z \forall y \exists x(p(x) \wedge q(y) \to r(f(z), x))$$

Lema

- *el cierre no afecta a la satisfacibilidad:* $F(x)$ *es satisfacible sii* $\exists x F(x)$ *lo es*
- *por extensión,* $SAT(F)$ *sii* $SAT(Cierre_{\exists}(F))$

3. Forma normal conjuntiva (FNC): la *matriz* se convierte en una conjunción de disyunciones de literales

- conectivas
  $\vdash (F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee G)$
  $\vdash (F \leftrightarrow G) \leftrightarrow (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$
- De Morgan
  $\vdash \neg(F \wedge G) \leftrightarrow \neg F \vee \neg G$ $\quad$ $\vdash \neg(F \vee G) \leftrightarrow \neg F \wedge \neg G$
- distribución de $\wedge$ y $\vee$
  $\vdash F \wedge (G \vee H) \leftrightarrow (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
  $\vdash F \vee (G \wedge H) \leftrightarrow (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Forma normal de Skolem

Lema

La forma normal conjuntiva de una fórmula (sin cuantificadores) siempre existe

Demostración.

- (ejercicio)

Lema

Para toda fórmula F, $\vdash F \leftrightarrow FNC(F)$

Demostración.

- fácil porque todos los pasos hacia $FNC(F)$ son equivalencias

Forma normal de Skolem

4 Eliminación de $\exists$: ya ningún cuantificador existencial

Se puede eliminar un cuantificador existencial sustituyendo la variable que liga por una *función de Skolem* de la forma $f(x_1, ..x_n)$, tal que:

- f es un símbolo nuevo de función
- $x_1, .., x_n$ son la variables cuantificadas universalmente *antes* del cuantificador a eliminar

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x \exists y (p(x) \to \neg q(y)) & \rightsquigarrow & \forall x (p(x) \to \neg q(f(x))) \\
\exists x \forall z (q(x,z) \vee r(a,x)) & \rightsquigarrow & \forall z (q(b,z) \vee r(a,b)) \\
\exists x \forall y \exists z (p(x) \wedge q(y) \to r(f(z),x)) & \rightsquigarrow & \forall y (p(a) \wedge q(y) \to r(f(g(y)),a))
\end{array}
$$

Lema

Una fórmula F es satisfacible sii $Skolem(F)$ lo es

Forma normal de Skolem

Definición

$$\begin{array}{rcl} Q.M & = & \mathit{Cierre}_{\exists}(\mathit{Prenex}(F)) \\ \mathit{FNS}(F) & = & \mathit{Skolem}(Q.\mathit{FNC}(M)) \end{array} \qquad Q.M = \text{[cuantificadores].[matriz]}$$

Teorema

F es satisfacible sii $FNS(F)$ lo es

Demostración.

1. F es satisfacible sii $\mathit{Prenex}(F)$ lo es
2. $\mathit{Prenex}(F)$ es satisfacible sii $\mathit{Cierre}_{\exists}(\mathit{Prenex}(F))$ lo es
3. M es satisfacible sii $\mathit{FNC}(M)$ lo es
4. $Q.M$ es satisfacible sii $Q.\mathit{FNC}(M)$ lo es (por ❸)
5. $Q.\mathit{FNC}(M)$ es satisfacible sii $\mathit{Skolem}(Q.\mathit{FNC}(M))$ lo es

Forma normal de Skolem

Conclusión

- estamos básicamente interesados en la satisfacibilidad
- $FNS(F)$ existe para cualquier F
- $FNS(F)$ preserva la satisfacibilidad

☞ entonces, podemos limitarnos sólo a fórmulas en forma normal de Skolem

- la forma normal de Skolem toma su nombre del matemático noruego Thoralf Albert Skolem (1887 - 1963)
- fue introducida en este contexto por Martin Davis y Hilary Putnam en 1960

Ventajas

- sin cuantificadores dentro de la fórmula
- sólo cuantificadores universales, sólo en la cabeza
- ninguna aparición libre de variable
- sólo $\wedge$ y $\vee$, en un orden prestablecido

Forma clausular

Es más fácil trabajar con la *Forma Clausular* $FC(F)$

- *cláusula*: disyunción de literales
- la forma clausular de F es el conjunto de cláusulas de $FNS(F)$, donde con las comas del conjunto se entiende la conjunción, y todas las variables están *cuantificadas universalmente*

$$\begin{array}{rcl} F & = & \forall x(p(x) \wedge \forall y(\neg q(y) \rightarrow r(z,x))) \\ FNS(F) & = & \forall x \forall y(p(x) \wedge (q(y) \vee r(a,x))) \\ FC(F) & = & \{p(x), q(y) \vee r(a,x)\} \end{array}$$

Teorema

F es satisfacible sii $FC(F)$ lo es

Forma clausular

Forma clausular de una deducción

Una deducción $[F_1, .., F_n] \vdash G$ es correcta sii $F_1 \wedge .. \wedge F_n \wedge \neg G$ es insatisfacible

- obtener la forma clausular de cada F_i
- obtener la forma clausular de $\neg G$

☞ importante: no podemos usar las mismas funciones de Skolem en fórmulas distintas de la estructura deductiva (siempre nombres *nuevos*)

☞ más importante: $FC(\neg G)$, no $\neg(FC(G))$!!! (ej. $\exists xp(x)$)

- realizar la unión de todos los conjuntos de cláusulas
- comprobar la satisfacibilidad

☞ ésto es lo que hay que hacer si nos piden que verifiquemos que una deducción de una fórmula a partir de unas premisas es correcta

☞ ya veremos varios métodos para demostrar la insatisfacibilidad de un conjunto de cláusulas

Forma clausular

Ejemplo: $[\exists x f(x), \exists x g(x)] \vdash \exists x(f(x) \wedge g(x))$

$$\begin{array}{lcl} FC(\exists x f(x)) & = & \{f(a)\} \\ FC(\exists x g(x)) & = & \{g(b)\} \\ FC(\neg(\exists x(f(x) \wedge g(x)))) & = & \{\neg f(x) \vee \neg g(x)\} \end{array}$$

Hay una interpretación que es un modelo:

- $D = \{0, 1\}$
- $I(a) = 0$
- $I(b) = 1$
- $I(f(a)) = \mathcal{F}(I(a)) = \mathcal{F}(0) = \mathbf{v}$
- $I(g(b)) = \mathcal{G}(I(b)) = \mathcal{G}(1) = \mathbf{v}$
- $I(f(b)) = \mathcal{F}(I(b)) = \mathcal{F}(1) = \mathbf{f}$
- $I(g(a)) = \mathcal{G}(I(a)) = \mathcal{G}(0) = \mathbf{f}$

entonces la deducción es incorrecta